DEVOIR MAISON N°1

SUITE DE FIBONACCI

Exercice 1. On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \qquad u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1) Calculer u_2, u_3, u_4, u_5.
2) Montrer par récurrence que : $\forall n \geq 2 \qquad u_{n+1} \geq \frac{3}{2} u_n$.
3) On considère la suite de terme général $v_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
   (a) Déterminer v_0 et v_1.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $v_{n+2} - v_{n+1} - v_n$.
   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = v_n$.

DEVOIR MAISON N°1

SUITE DE FIBONACCI

Exercice 1. On considère la suite de Fibonacci $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 0 \qquad u_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1) Calculer u_2, u_3, u_4, u_5.
2) Montrer par récurrence que : $\forall n \geq 2 \qquad u_{n+1} \geq \frac{3}{2} u_n$.
3) On considère la suite de terme général $v_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
   (a) Déterminer v_0 et v_1.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $v_{n+2} - v_{n+1} - v_n$.
   (c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = v_n$.